Gourdon
Dantzer
Isenmann-P.

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Notion d'espace vectoriel normé

1. Généralités et premiers exemples

Définition 1.1 On dit qu'une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est une norme sur E si elle vérifie :

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) pour tous $x, y \in E$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

L'espace E muni de cette norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n).

Remarque 1.2 Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace métrique pour la distance $d : (x,y) \in E^2 \longmapsto \|x-y\|$.

Exemples 1.3

- la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$
- $\|.\|_2 : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$
- $\|.\|_1 : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- le module est une norme sur $\mathbb{C}$
- $\|.\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sup_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$
- $\|.\|_\infty : f \in \mathcal{B}(X,E) \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$

Exemple 1.4 Les espaces $(L^p, \|.\|_p)$, pour $p \geqslant 1$, sont des espaces vectoriels normés.

Définition 1.5 Deux normes N_1, N_2 sur E sont dites équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $c_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant c_2 N_1(x)$.

Proposition 1.6 Des normes équivalentes sur E induisent des métriques qui sont équivalentes.

Remarque 1.7 Pour E e.v.n, $(x,y) \longmapsto x+y$ et $x \longmapsto \lambda x$ sont continues.

2. Espaces de Banach

Définition 1.8 On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé complet.

Exemples 1.9

- $\forall n \geqslant 1$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ est un Banach
- soient X un ensemble, E un Banach alors $(\mathcal{B}(X,E), \|.\|_\infty)$ est un Banach
- $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas un Banach

Théorème 1.10 Soit E un espace vectoriel normé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E est un Banach

(ii) pour tout $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_n \|x_n\| < +\infty$, la série de terme général $(x_n)_n$ est convergente dans E

Théorème 1.11 (Riesz - Fisher) Pour tout $p \geqslant 1$, $(L^p, \|.\|_p)$ est un Banach.

3. Topologie

Proposition 1.12 Un sous-espace vectoriel est convexe.

Théorème 1.13 Supposons que E soit un espace vectoriel. Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

Remarque 1.14 La condition d'ouvert est nécessaire.

Contre-exemple 1.15

$$T := \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_+) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_-^*) \subset \mathbb{R}^2$$ est connexe non connexe par arcs

développement 1

II - Applications linéaires continues

1. Critères de continuité

Dans cette partie, $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés.

Théorème 2.1 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E (ii) f est continue en 0

(iii) f est bornée sur $\overline{B}(0,1)$ (iv) f est bornée sur $\mathbb{S}^1$

(v) $\exists M > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ (vi) f est lipschitzienne

(vii) f est uniformément continue sur E

Définition 2.2 On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F. Il est muni d'une norme : $\|.\| : f \in \mathcal{L}_c(E,F) \longmapsto \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$

On parle de norme subordonnée.

Proposition 2.3 Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $\|g \circ f\| \leqslant \|f\| . \|g\|$

Exemple 2.4

l'application dérivation $(C^1([0,1]), \|.\|_\infty) \longrightarrow (C^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ est linéaire non continue

Théorème 2.5 Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Application 2.6 Soient E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $\|u\| < 1$. Alors $id - u$ est inversible d'inverse $\sum\limits_n u^n$.

Théorème 2.7 Soient E un e.v.n, D_1 dense dans E et F un Banach. Une application linéaire continue de D_1 dans F se prolonge de manière unique sur E en une application linéaire continue de même norme.

développement 2

Applications 2.8 Fourier - Plancherel, intégrale de Riemann

2. Cas particulier matriciel

Proposition 2.9 Soient $n \geqslant 1$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de $\|.\|_{\mathcal{M}_n} : A \longmapsto \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est un espace de Banach.

Exemples 2.10

- la norme subordonnée à $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ est : $|||.|||_\infty : A \longmapsto \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- la norme subordonnée à $\|.\|_1$ sur $\mathbb{K}^n$ est : $|||.|||_1 : A \longmapsto \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- la norme subordonnée à $\|.\|_2$ sur $\mathbb{K}^n$ est : $|||.|||_2 = \rho : A \longmapsto \max Sp(A)$

Proposition 2.11 (Lemme de Householder) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que la norme subordonnée $|||.|||$ vérifie $|||A||| < \rho(A) + \varepsilon$.

Théorème 2.12 Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et x solution de $Ax = b$. On suppose que A se décompose de la forme $M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit la suite des itérés $(x_k)_k$ par $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$. La méthode est convergente si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

III - Espaces vectoriels normés en dimension finie

Théorème 3.1 Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 3.2 Toute application linéaire d'un e.v.n. de dimension finie dans un e.v.n. (quelconque) est continue.

Corollaire 3.3 Tout e.v.n. de dimension finie est complet.

Corollaire 3.4 Les parties compactes d'un e.v.n. de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Le théorème suivant fournit un contre-exemple à ce dernier énoncé :

Théorème 3.5 (Riesz) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé ~~de dimension finie~~. Alors $\overline{B}_E(0,1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.